



دانشگاه شاهرود

دانشکده علوم ریاضی

## پایان نامه کارشناسی ارشد

# نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

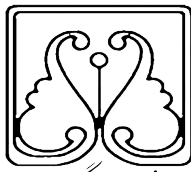
دکتر داود خجسته سالکویه

استاد مشاور

استاد مشاور اول

اسفند ۱۳۹۷

بسم الله الرحمن الرحيم



دانشگاه شاهرود

گروه ریاضی کاربردی  
گرایش آنالیز عددی

# نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

دانشجو

محسن مسعودی

استاد راهنما

دکتر داود خجسته سالکویه

استاد مشاور

استاد مشاور اول

اسفند ۱۳۹۷



بسمه تعالی

## صورتجلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد

جلسه دفاع از پایان نامه کارشناسی ارشد آقای محسن مسعودی در رشته ریاضی کاربردی گرایش آنالیز عددی با عنوان:

### نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

به ارزش ۶ واحد که در ساعت ۰۰ : ۱۶ روز سه شنبه مورخ ۱۳۹۷/۱۲/۷ در محل دانشکده علوم ریاضی دانشگاه گیلان برگزار شد. هیأت داوران پس از بررسی، نتیجه را به شرح زیر اعلام می دارند:

□ پایان نامه با نمره ۰۰۰ و با امتیاز عالی □، بسیار خوب □، خوب □، قابل قبول □ مورد تأیید قرار گرفت.

□ پایان نامه در وضع فعلی با اصلاحات جزئی و نمره ۰۰۰ و با امتیاز عالی □، بسیار خوب □، خوب □، قابل قبول □ پذیرفته شد.

□ پایان نامه به شکل فعلی، مورد تأیید قرار نگرفت و پیشنهاد شد ..... .

اعضاء هیأت داوران	مرتبه دانشگاهی	تخصص	محل کار اعضاء هیأت داوران	امضاء
۱- دکتر داود خجسته سالکویه	استاد	آنالیز عددی	دانشگاه گیلان	
۱- استاد مشاور استاد مشاور اول	استادیار	آنالیز عددی	دانشگاه گیلان	
۱- دکتر فائزه توتونیان	استاد	آنالیز عددی	دانشگاه فردوسی مشهد	
۲- دکتر سعید کتابچی	استاد	تحقیق در عملیات	دانشگاه گیلان	
۳- دکتر حسین امینی خواه	استاد	آنالیز عددی	دانشگاه گیلان	

نماینده تحصیلات تکمیلی <sup>۱</sup>	مرتبه دانشگاهی	گروه آموزشی / پژوهشی	امضاء
دکتر نصیر تقی زاده	استاد	معادلات دیفرانسیل	

<sup>۱</sup> نسخه اصل از صورتجلسه توسط نماینده تحصیلات تکمیلی تنظیم و به مدیر گروه تسلیم شود. یک نسخه در گروه آموزشی، یک نسخه در آموزش دانشکده، یک نسخه در پرونده دانشجو نگهداری و یک نسخه نیز به دانشجو تحویل داده شود.



## حوزه معاونت آموزشی و تحصیلات تکمیلی دانشگاه

### تعهدنامه اصالت پایان نامه

اینجانب محسن مسعودی دانش‌آموخته مقطع کارشناسی ارشد در رشته ریاضی کاربردی که در تاریخ ۱۳۹۷/۱۲/۷ از پایان‌نامه خود با عنوان *نتایجی در پیش‌شرط‌سازی مسائل نقطه زینی با کسب نمره ۱۹/۵ و درجه عالی دفاع نموده‌ام، اظهار می‌کنم که:*

۱. این پایان‌نامه حاصل تحقیق و پژوهش اینجانب بوده و در مواردی که از دستاوردهای علمی و پژوهشی دیگران (اعم از کتاب، مقاله و ...) استفاده کرده‌ام، مطابق ضوابط موجود، نام منبع مورد استفاده و سایر مشخصات آن را در فهرست منابع ذکر و درج نموده‌ام.

۲. این پایان‌نامه پیشتر برای دریافت هیچ مدرک تحصیلی (هم سطح، پایین‌تر یا بالاتر) در سایر دانشگاه‌ها و مؤسسات آموزش عالی داخلی و خارجی ارائه نشده‌است.

ضمناً متعهد می‌شوم:

۳. چنانچه بعد از دانش‌آموختگی، قصد استفاده و هر گونه بهره‌برداری اعم از چاپ مقاله، کتاب، ثبت اختراع و ... از این پایان‌نامه را داشته باشم، از استاد محترم راهنما و گروه آموزشی مربوطه مجوزهای لازم را اخذ نمایم.

۴. چنانچه در هر مقطع زمانی خلاف موارد فوق ثابت شود، عواقب ناشی از آن را بپذیرم و دانشگاه گیلان مجاز است با اینجانب مطابق ضوابط و مقررات رفتار نموده و در صورت ابطال مدرک تحصیلی‌ام، هیچگونه ادعایی نخواهم داشت.

نام و نام خانوادگی:

تاریخ و امضاء:

تقدیم بہ  
این تحفہ نامحترق تقدیم بہ وجود عزیزشان.

پروړکار اتوراسپاس می کویم که بار دیگر به من فرصت آموختن دادی.

# فهرست مطالب

پ	فهرست مطالب
ت	فهرست جداول
ث	فهرست تصاویر
ج	فهرست الگوریتم‌ها
چ	چکیده
۱	پیش‌گفتار
۲	فصل ۱. پیش‌نیازها
۲	۱.۱ تعاریف و قضایا
۳	فصل ۲. نتایجی در روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی
۳	۲.۱ مقدمه
۴	نتیجه‌گیری
۵	کتاب‌نامه
۸	پیوست الف. نمونه الگوریتم‌ها و جداول مختلف
۱۰	الف ۱. نمونه جدول
۱۵	الف ۲. خروجی متلب به عنوان دستورات $\LaTeX$
۱۷	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۱۸	واژه‌یاب انگلیسی
۱۹	فهرست نمادهای اختصاری
۲۰	واژه‌نامه انگلیسی به فارسی
۲۲	واژه‌نامه فارسی به انگلیسی



## فهرست جداول

الف ۱.	مشخصات ماتریس‌های $A$ و $B$ به ازای شبکه‌های مختلف.	۱۰
الف ۲.	مشخصات کلی ماتریس‌های $A$ ، $B$ و $C$ برای آزمون‌ها.	۱۰
الف ۳.	مشخصات کلی ماتریس‌های $A$ ، $B$ و $C$ برای آزمون‌ها.	۱۱
الف ۴.	شعاع طیفی و مقدار پارامتر پیشنهادی.	۱۲
الف ۵.	تکرار و زمان محاسبه برای روش $IEPSS$ .	۱۲
الف ۶.	مشخصات ماتریس‌های $A$ و $B$ به ازای شبکه‌های مختلف.	۱۳
الف ۷.	نتایج عددی برای مسئله جریان درون کانال با شبکه $2^r \times 2^r$ .	۱۳
الف ۸.	مشخصات کلی ماتریس‌های $A$ ، $B$ و $C$ برای آزمون‌ها.	۱۳
الف ۹.	نتایج عددی برای مسئله حفره با درپوش متحرک با شبکه $2^r \times 2^r$ .	۱۴
الف ۱۰.	پیش‌شرط‌سازهای خاصی از پیش‌شرط‌ساز $\mathcal{P}_{EPSS}$ .	۱۴
الف ۱۱.	نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال ۱.	۱۵
الف ۱۲.	نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال ۱.	۱۶

# فهرست تصاویر

## فهرست الگوریتم‌ها

۸	الف ۱. الگوریتم روش GMRES(m) با پیش شرط‌ساز راست
۹	الف ۲. الگوریتم روش GMRES(m) با پیش شرط‌ساز راست
۹	الف ۳. method IEPSS
۹	الف ۴. $y = x^n$ Computation
۱۰	الف ۵. الگوریتم هم‌رنگ‌سازی چندبانه.

## نتایجی در پیش شرط سازی مسائل نقطه زینی

محسن مسعودی

در این رساله، ابتدا به بررسی حل عددی یک دستگاه معادلات خطی می پردازیم و یک روش تکراری را که تعمیمی از روش تجزیه معین مثبت و پادهرمیتی است، ارائه می کنیم. برای حالت های خاصی از این روش، مقادیری را برای پارامتر آن پیشنهاد می دهیم. سپس به بررسی مسائل نقطه زینی پرداخته و روش های تکراری و پیش شرط سازی را برای حل این مسائل به دست می آوریم. در ادامه، تعمیم روش معین مثبت و پادهرمیتی را برای این مسائل بکار گرفته و شرایط همگرایی و نیمه همگرایی آن را مورد مطالعه قرار می دهیم. خواهیم دید که این روش تعمیم بسیاری از روش های است که برای حل این مسأله پیشنهاد شده اند. در نهایت، یک حالت خاص از این روش را بررسی کرده و پارامترهای بهینه را برای این روش به دست می آوریم. نتایج به دست آمده را با مثال هایی مورد آزمون و مقایسه قرار می دهیم.

**کلید واژه:** مسائل نقطه زینی، پیش شرط سازی، همگرایی، نیمه همگرایی.

## پیش‌گفتار

حل یک دستگاه معادلات خطی به صورت

# فصل ۱

## پیش‌نیازها

در این بخش برخی از مفاهیم، تعاریف و قضایا که در فصل‌های آینده به آنها نیاز داریم بیان می‌کنیم.

### ۱.۱ تعاریف و قضایا

در این بخش ...

## فصل ۲

# نتایجی در روش‌های تکراری برای حل دستگاه معادلات خطی

۱.۲ مقدمه

دستگاه معادلات خطی

# نتیجه گیری

در این رساله، ابتدا



## کتاب نامه

- [1] BAI, Z.-Z., AND BENZI, M. Regularized HSS iteration methods for saddle-point linear systems. *BIT Numerical Mathematics* 57, 2 (2017), 287–311.
- [2] BAI, Z.-Z., AND GOLUB, G. H. Accelerated Hermitian and skew-Hermitian splitting iteration methods for saddle-point problems. *IMA Journal of Numerical Analysis* 27, 1 (2007), 1–23.
- [3] BAI, Z.-Z., GOLUB, G. H., AND PAN, J.-Y. Preconditioned Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive semidefinite linear systems. *Numerische Mathematik* 98, 1 (2004), 1–32.
- [4] BENZI, M., AND GOLUB, G. H. A preconditioner for generalized saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 1 (2004), 20–41.
- [5] CAO, Y. Regularized DPSS preconditioners for non-Hermitian saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 84 (2018), 96–102.
- [6] CAO, Y., DU, J., AND NIU, Q. Shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 272 (2014), 239–250.
- [7] CAO, Y., LI, S., AND YAO, L.-Q. A class of generalized shift-splitting preconditioners for nonsymmetric saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 49 (2015), 20–27.
- [8] CAO, Y., AND MIAO, S.-X. On semi-convergence of the generalized shift-splitting iteration method for singular nonsymmetric saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 71, 7 (2016), 1503–1511.
- [9] CHAO, Z., CHEN, G., AND GUO, Y. On the semi-convergence of regularized HSS iteration methods for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 76, 2 (2018), 438–450.
- [10] CHEN, C.-R., AND MA, C.-F. A generalized shift-splitting preconditioner for singular saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 269 (2015), 947–955.

- [11] HUANG, Z.-G., WANG, L.-G., XU, Z., AND CUI, J.-J. A generalized variant of the deteriorated PSS preconditioner for nonsymmetric saddle point problems. *Numerical Algorithms* 75, 4 (2017), 1161–1191.
- [12] LIANG, Z.-Z., AND ZHANG, G.-F. Semi-convergence analysis of preconditioned deteriorated PSS iteration method for singular saddle point problems. *Numerical Algorithms* 78, 2 (2018), 379–404.
- [13] PAN, J.-Y., NG, M. K., AND BAI, Z.-Z. New preconditioners for saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 172, 2 (2006), 762–771.
- [14] REN, Z.-R., CAO, Y., AND NIU, Q. Spectral analysis of the generalized shift-splitting preconditioned saddle point problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 311 (2017), 539–550.
- [15] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. On the generalized shift-splitting preconditioner for saddle point problems. *Applied Mathematics Letters* 48 (2015), 55–61.
- [16] SALKUYEH, D. K., MASOUDI, M., AND HEZARI, D. A preconditioner based on the shift-splitting method for generalized saddle point problems. in *46th Annual Iranian Mathematics Conference* (Yazd, Iran, Aug. 2015), volume 1, Yazd University, pp. 1061–1064.
- [17] SALKUYEH, D. K., AND RAHIMIAN, M. A modification of the generalized shift-splitting method for singular saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 74, 12 (2017), 2940–2949.
- [18] SHEN, Q.-Q., AND SHI, Q. Generalized shift-splitting preconditioners for nonsingular and singular generalized saddle point problems. *Computers & Mathematics with Applications* 72, 3 (2016), 632–641.
- [19] SHEN, S.-Q. A note on PSS preconditioners for generalized saddle point problems. *Applied Mathematics and Computation* 237 (2014), 723–729.
- [20] SHI, Q., SHEN, Q.-Q., AND YAO, L.-Q. Eigenvalue bounds of the shift-splitting preconditioned singular nonsymmetric saddle-point matrices. *Journal of Inequalities and Applications* 269 (2015), 947–955.
- [21] SIMONCINI, V., AND BENZI, M. Spectral properties of the Hermitian and skew-Hermitian splitting preconditioner for saddle point problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* 26, 2 (2004), 377–389.

- 
- [22] WANG, R.-R., NIU, Q., MA, F., AND LU, L.-Z. Spectral properties of a class of matrix splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 298 (2016), 138–151.
- [23] ZHENG, Q., AND LU, L. Extended shift-splitting preconditioners for saddle point problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 313 (2017), 70–81.

## پیوست الف

### نمونه الگوریتم‌ها و جداول مختلف

چند نمونه الگوریتم:

---

**الگوریتم الف ۱.** الگوریتم روش GMRES(m) با پیش شرط‌ساز راست

---

(۱) قرار دهید  $r_0 = b - Ax_0$ ،  $\beta = \|r_0\|_2$  و  $v_1 = r_0/\beta$ .

(۲) برای  $j = 1, 2, \dots, m$ ، روند زیر را تکرار کنید:

(آ) قرار دهید  $z_j = M^{-1}v_j$ .

(ب) قرار دهید  $w := Az_j$ .

(ج) به ازای  $j, i = 1, 2, \dots, j$ ، روند زیر را تکرار کنید:

• قرار دهید  $h_{ij} = (w, v_i)$ .

• قرار دهید  $w := w - h_{ij}v_i$ .

(د)  $h_{j+1,j} = \|w\|_2$  و  $v_{j+1} = w/h_{j+1,j}$  محاسبه کنید.

(۳) تعریف کنید  $Z_m = [z_1, \dots, z_m]$  و  $\bar{H}_m = \{h_{ij}\}_{1 \leq i \leq j+1, 1 \leq j \leq m}$ .

(۴)  $y_m = \operatorname{argmin}_y \|\beta e_1 - \bar{H}_m y\|_2$  و  $x_m = x_0 + Z_m y_m$  را محاسبه کنید.

(۵) اگر جواب تقریبی محاسبه شده در شرط توقف صدق می‌کند، متوقف شوید و در غیر این صورت قرار دهید  $x_0 = x_m$  و به گام ۱ بروید.

---

---

**Algorithm 3** IEPSS method

---

1. Choose an initial guess  $\mathbf{u}^0$
  2. For  $k = 0, 1, 2, \dots$ , until convergence, Do
    - 2.i. Compute  $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^k$
    - 2.ii. Solve  $(\Sigma + \hat{\mathcal{P}})\mathbf{z}^k = \mathbf{r}^k$  by a Krylov subspace method to compute the approximate solution  $\bar{\mathbf{z}}^k$  satisfying  $\|\mathbf{r}^k - (\Sigma + \hat{\mathcal{P}})\bar{\mathbf{z}}^k\| \leq \epsilon_k \|\mathbf{r}^k\|$ , where  $\epsilon_k$  is a given tolerance
    - 2.iii.  $\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}} := \mathbf{u}^k + \bar{\mathbf{z}}^k$
    - 2.iv. Compute  $\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{u}^{k+\frac{1}{2}}$
    - 2.v. Solve  $(\Sigma + \mathcal{S})\mathbf{z}^{k+\frac{1}{2}} = \mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}}$  by a Krylov subspace method to compute the approximate solution  $\bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}$  satisfying  $\|\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}} - (\Sigma + \mathcal{S})\bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}\| \leq \eta_k \|\mathbf{r}^{k+\frac{1}{2}}\|$ , where  $\eta_k$  is a given tolerance
    - 2.vi.  $\mathbf{u}^{k+1} := \mathbf{u}^k + \bar{\mathbf{z}}^{k+\frac{1}{2}}$
- 

به هر یک از گاهای بالا می‌توان ارجاع داد. به طور مثال در اینجا به گام ۲ ارجاع می‌دهیم.

---

**Algorithm 4** Computation  $y = x^n$ .

---

**Require:**  $n \geq 0$

**Ensure:**  $y = x^n$

```

 $y \leftarrow 1$ 
 $X \leftarrow x$ 
 $N \leftarrow n$ 
while  $N \neq 0$  do
  if  $N$  is even then
     $X \leftarrow X \times X$ 
     $N \leftarrow N/2$ 
  else  $\{N \text{ is odd}\}$ 
     $y \leftarrow y \times X$ 
     $N \leftarrow N - 1$ 
  end if
end while

```

---

## الگوریتم الف ۵. الگوریتم هم‌رنگ‌سازی چندباند.

ورودی: تصاویر  $A$  و  $B$ .خروجی: تصویر  $S$  حاصل از نیمه‌ی سمت چپ  $A$  و نیمه‌ی سمت راست  $B$ ۱: هرماه‌ی لاپلاسین  $LA, LB$  از تصاویر  $A, B$  ساخته می‌شوند.۲: هرم لاپلاسین سومی به نام  $LS$  با کپی کردن نیمه‌های سمت چپ  $LA$  و سمت راست  $LB$  ساخته۳: تصویر نهایی  $S$  با گسترش هر سطح هرم  $LS$  و جمع آن با سطح بعدی حاصل خواهد شد.۴: اگر  $\circ \text{mod}(a, 2) ==$  آنگاه۵: چاپ کن  $a$  زوج است.

۶: درغیراینصورت

۷: چاپ کن  $a$  فرد است.

۸: پایان اگر.

## الف ۱. نمونه جدول

در ادامه نمونه‌های مختلفی را از جدول‌های مختلف می‌بینید.

جدول الف ۱: مشخصات ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به ازای شبکه‌های مختلف.

Gride	مسأله جریان درون کانال				مسأله حفره با درپوش متحرک و مسأله برخورد جریان			
	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$
$16 \times 16$	578	192	6,698	2,084	578	190	6,178	1,967
$32 \times 32$	2178	768	29,546	10,142	2,178	766	28,418	9,868
$64 \times 64$	8,450	3,072	124,550	45,062	8,450	3,070	122,206	44,516
$128 \times 128$	33,282	12,288	511,152	192,174	33,282	12,286	506,376	191,084
$256 \times 256$	132,098	49,152	207,0764	791,738	132,098	49,150	206,1140	789,560

جدول الف ۲: مشخصات کلی ماتریس‌های  $A, B$  و  $C$  برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	$256 \times 256$	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	$480 \times 640$	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

تغییر اندازه جدول با تغییر عدد  $\backslash \text{scalebox} \{ \}$  به  $\backslash \text{scalebox} \{ \}$ .

جدول الف ۳: مشخصات کلی ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	$256 \times 256$	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	$480 \times 640$	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

جدول الف ۴: شمع طیفی و مقدار پارامتر پیشنهادی.

	$\Sigma = \alpha Q_j$	$Q_1$				$Q_2$				$Q_3$			
$n$	$P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
400	$\alpha_*$	21.3270	26.8701	21.2969	363.9214	0.8525	1.0000	0.8530	1.5236	0.9868	1.1724	1.0000	1.1766
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.8889	0.9109	0.8905	0.9931	0.2819	0.3732	0.2817	0.5224	0.0816	0.2817	0.0030	0.0866
800	$\alpha_*$	30.1292	37.9737	30.0820	726.1630	0.8527	1.0000	0.8530	1.5228	0.9864	1.1724	1.0000	1.1785
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9201	0.9361	0.9214	0.9966	0.2818	0.3732	0.2817	0.5222	0.0828	0.2817	0.0015	0.0847
1600	$\alpha_*$	42.5868	53.6843	42.5167	1450.6479	0.8529	1.0000	0.8530	1.5224	0.9862	1.1724	1.0000	1.1795
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9428	0.9544	0.9438	0.9983	0.2817	0.3732	0.2817	0.5221	0.0833	0.2817	0.0008	0.0837
3200	$\alpha_*$	60.2109	75.9078	60.1095	2899.6183	0.8529	1.0000	0.8530	1.5222	0.9861	1.1724	1.0000	1.1800
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9592	0.9675	0.9599	0.9991	0.2817	0.3732	0.2817	0.5220	0.0836	0.2817	0.0004	0.0832
6400	$\alpha_*^{(i,j)}$	85.1399	107.3406	84.9948	5797.5595	0.8529	1.0000	0.8530	1.5221	0.9861	1.1724	1.0000	1.1802
	$\rho(G(\alpha_*))$	0.9710	0.9769	0.9715	0.9996	0.2817	0.3732	0.2817	0.5220	0.0838	0.2817	0.0002	0.0830

جدول الف ۵: تکرار و زمان محاسبه برای روش IEPSS.

		$\Sigma = \alpha Q_j$				$Q_1$				$Q_2$				$Q_3$			
$n$	$P_i$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$
400	CPU	0.20	0.11	0.12	0.37	0.08	0.03	0.04	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06	0.05	0.04	0.02	0.06
	IT	113	104	128	1076	9	9	8	13	6	8	4	7				
800	CPU	0.15	0.11	0.12	0.61	0.06	0.09	0.13	0.08	0.07	0.05	0.02	0.15				
	IT	159	147	182	1850	8	10	8	12	6	8	3	7				
1600	CPU	0.43	0.18	0.20	2.18	0.10	0.08	0.12	0.14	0.12	0.14	0.04	0.37				
	IT	223	206	257	3098	8	10	7	11	6	8	3	7				
3200	CPU	1.69	0.48	1.39	5.06	1.04	0.39	0.42	1.26	0.47	0.38	0.25	2.30				
	IT	314	291	362	4993	8	9	7	11	6	8	3	7				
6400	CPU	3.53	1.56	3.05	11.59	2.18	1.91	1.24	2.65	1.67	1.03	0.84	6.13				
	IT	442	413	511	7586	8	8	7	11	6	8	3	7				
400	CPU	0.22	0.07	0.07	0.05	0.06	0.03	0.04	0.04	0.04	0.04	0.02	0.05				
	IT	40	39	37	77	7	9	7	8	6	8	4	5				
800	CPU	0.11	0.06	0.08	0.08	0.07	0.04	0.06	0.06	0.08	0.06	0.04	0.14				
	IT	58	55	40	99	8	9	7	8	7	8	4	5				
1600	CPU	0.22	0.08	0.12	0.11	0.09	0.07	0.10	0.09	0.13	0.08	0.09	0.35				
	IT	80	59	57	143	8	9	7	7	7	8	5	5				
3200	CPU	1.33	0.40	0.51	0.34	0.33	0.31	0.47	0.37	0.50	0.38	0.49	1.26				
	IT	94	70	73	205	9	10	7	7	8	11	5	5				
6400	CPU	3.72	0.41	0.93	0.70	1.55	1.37	0.98	0.72	1.21	0.97	2.01	4.29				
	IT	129	73	73	280	8	12	7	6	10	13	5	5				



سطرهای جدول را می‌توانید رنگی کنید. البته این جدول هنگام ارائه مناسب است تا اینکه در پایان نامه قرار گیرد

\taburowcolors[] {blue!..yellow!}

این دستور رنگ آبی ۴۰ را با رنگ زرد ۸۰ به ۵ قسمت تقسیم می‌کند و آن را از سطر چهارم جدول به بعد به کار می‌گیرد. (در ابتدای جدول سطرهایی وجود دارند که دیده نمی‌شوند.)

جدول الف ۶: مشخصات ماتریس‌های  $A$  و  $B$  به ازای شبکه‌های مختلف.

Gride	مسئله جریان درون کانال				مسئله حفره با درپوش متحرک و مسئله برخورد جریان			
	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$
$16 \times 16$	578	192	6,698	2,084	578	190	6,178	1,967
$32 \times 32$	2178	768	29,546	10,142	2,178	766	28,418	9,868
$64 \times 64$	8,450	3,072	124,550	45,062	8,450	3,070	122,206	44,516
$128 \times 128$	33,282	12,288	511,152	192,174	33,282	12,286	506,376	191,084
$256 \times 256$	132,098	49,152	207,0764	791,738	132,098	49,150	206,1140	789,560

\taburowcolors[] {white!..blue!}

رنگ ۱۰۰ سفید تا رنگ ۱۰ آبی به سه قسمت تقسیم می‌شود و از سطر ۶ به بعد مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمونه جداول دیگر

جدول الف ۷: نتایج عددی برای مسئله جریان درون کانال با شبکه  $2^r \times 2^r$ .

r	Preconditioner	$\alpha = 10^{-4}$		$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 1$		$\alpha = 10^2$	
		IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
4	$\mathcal{P}_{HSS}$	5	0.05	6	0.06	7	0.07	17	0.21
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	3	0.02	3	0.03	3	0.02	4	0.03
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
5	$\mathcal{P}_{HSS}$	9	0.48	10	0.5	13	0.72	47	2.84
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	5	0.22	5	0.22	5	0.2	9	0.47
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	5	0.21	3	0.09	3	0.07	3	0.06
6	$\mathcal{P}_{HSS}$	21	5.94	13	3.46	28	8.39	498	154.59
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	8	2.08	8	2.06	8	1.96	21	6.15
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	6	1.45	3	0.4	3	0.4	3	0.38
7	$\mathcal{P}_{HSS}$	48	96.57	15	28.06	83	169.45	320	1089.81
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	17	32.79	16	30.53	15	28.83	86	178.1
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	5	7.45	3	2.84	3	2.65	3	2.52
8	$\mathcal{P}_{HSS}$	169	3093.67	20	336.76	-	‡	-	‡
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	42	758.74	37	654.38	34	603.85	-	‡
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	4	40.52	3	24.29	3	22.11	2	16.03

جدول الف ۸: مشخصات کلی ماتریس‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  برای آزمون‌ها.

	Grid or Pixel	$n$	$m$	$nnz(A)$	$nnz(B)$	$nnz(C)$	$cond(A)$
Example 1	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	9.88e+03
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	8.62e+04
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	1.38e+06
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	2.20e+07
Example 2	$32 \times 32$	2178	1022	16818	7682	3064	1.40e+06
	$64 \times 64$	8450	4094	70450	31746	12280	2.21e+07
	$128 \times 128$	33282	16382	288306	129026	49144	3.52e+08
	$256 \times 256$	132098	65534	1166386	520194	196600	5.62e+09
Example 3	$256 \times 256$	65536	65536	65536	5966336	196096	8.77e+06
	$480 \times 640$	307200	307200	307200	29395200	920320	8.77e+06

جدول الف ۹: نتایج عددی برای مسأله حفره با درپوش متحرک با شبکه  $2^r \times 2^r$ 

		$\alpha = 10^{-4}$		$\alpha = 10^{-2}$		$\alpha = 1$		$\alpha = 10^2$	
r	Precon.	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU	IT	CPU
$16 \times 16$	$\mathcal{P}_{HSS}$	4	0.04	5	0.06	13	0.16	106	1.46
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	4	0.04
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	3	0.02	3	0.02	3	0.02	3	0.02
$32 \times 32$	$\mathcal{P}_{HSS}$	8	0.37	9	0.45	144	8.45	†	-
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	5	0.19	5	0.2	5	0.21	9	0.43
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	5	0.21	4	0.12	3	0.07	3	0.07
$64 \times 64$	$\mathcal{P}_{HSS}$	14	3.87	47	14.21	†	-	†	-
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	8	1.97	8	2.03	9	2.29	27	8.1
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	11	3.08	3	0.47	3	0.42	3	0.39
$128 \times 128$	$\mathcal{P}_{HSS}$	38	76.32	†	-	†	-	†	-
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	15	30.85	14	25.95	17	33.46	79	160.91
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	9	17.3	3	3.86	3	3.69	3	3.86
$256 \times 256$	$\mathcal{P}_{HSS}$	<b>115</b>	<b>2064.44</b>	-	††	-	†	-	†
	$\mathcal{P}_{RHSS}$	37	641.5	<b>28</b>	<b>471.97</b>	38	648.74	-	†
	$\mathcal{P}_{REHSS}$	5	67.63	3	33.11	3	31.91	<b>3</b>	<b>27.43</b>

جدول الف ۱۰: پیش شرطسازهای خاصی از پیش شرطساز  $\mathcal{P}_{EPSS}$ 

مرجع	همگرایی و نیمه همگرایی	پیش شرطساز	$P_\beta$	$P_\alpha$	$C$	$B$	$A$	$B_P = B$
[۴]	همگرا	$\mathcal{P}_{HSS}$	$\alpha I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل	PD	
[۲۱]	همگرا	$\mathcal{P}_{HSS}$	$\alpha I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل	SPSD	
		$\mathcal{P}_{GHSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	HPSD		HPD	
		$\mathcal{P}_{EHSS}$	$\beta Q_2$	$\alpha Q_1$	HPSD		HPD	
[۱]	همگرا	$\mathcal{P}_{RHSS}$	$\alpha I + Q$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	HPD	
[۹]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{RHSS}$	$\alpha I + Q$	$\alpha I$	°	رتبه ناقص	HPD	
[۳]	همگرا	$\mathcal{P}_{PHSS}$	$\alpha Q$	$\alpha A$	°	رتبه کامل	HPD	
[۲]	همگرا	$\mathcal{P}_{AHSS}$	$\beta Q$	$\alpha A$	°	رتبه کامل	HPD	
[۱۳]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	$\alpha I$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	PD	
[۱۹]	همگرا	$\mathcal{P}_{PSS}(\mathcal{P}_{DPSS})$	$\alpha I$	$\alpha I$	HPSD	رتبه کامل	PD	
[۲۲، ۱۱]	همگرا	$\mathcal{P}_{GPSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	PD	
[۱۲]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{EPSS}(\mathcal{P}_{PDPSS})$	$\beta Q_2$	$\alpha Q_1$	°	رتبه ناقص	PD	
[۵]	همگرا	$\mathcal{P}_{RPSS}$	$\alpha I + Q$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	PD	$B_P = \circ$
[۶]	همگرا	$\mathcal{P}_{SS}$	$\alpha I$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	HPD	
[۱۴، ۱۰]	همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	SPD	
[۱۵]	همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۸]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	°	رتبه ناقص	PD	
[۲۰]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	°	رتبه ناقص	SPD	
[۱۸]	نیمه همگرا و همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل و ناقص	PD	
[۱۵]	همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل	SPD	
[۱۶]	همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	SPSD	رتبه کامل	PD	
[۷]	همگرا	$\mathcal{P}_{GSS}$	$\beta I$	$\alpha I$	°	رتبه کامل	PD	
[۲۳]	همگرا	$\mathcal{P}_{ESS}$	$Q_2$	$Q_1$	°	رتبه کامل	SPD	
[۱۷]	نیمه همگرا	$\mathcal{P}_{ESS}$	$\beta Q_2$	$\alpha Q_1$	°	رتبه ناقص	PD	

## الف ۲. خروجی متلب به عنوان دستورات $\text{\LaTeX}$

تمام جدول زیر یک خروجی از متلب است. با دستورهای print در متلب، می توان خروجی متلب را دستورهای ورودی یک جدول در لاتک قرار داد. از این رو مشکلی در گرد کردن یا جایگذاری اشتباه داده ها بوجود نمی آید.

جدول الف ۱۱: نتایج عددی روش های GMRES و FGMRES برای مثال ۱.

	Grid	Prec.	GSS	GHSS	GPSS	ESS	EHSS	EPSS	SS	HSS	PSS	SEPSS	SEPSS*	SEPSS**
GMRES	$32 \times 32$	$t_\alpha$	-3.75	-2.00	-2.00	-3.50	-0.75	-0.75	-4.00	-2.25	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-0.75	-0.75	-4.00	-2.25	-2.25	0.00	0.41	0.14
		IT	6	54	56	3	52	54	6	61	74	17	22	17
		CPU	0.03	0.11	0.08	0.02	0.12	0.08	0.02	0.14	0.10	0.02	0.04	0.04
		$E_K$	1.8e-07	3.2e-07	2.3e-07	3.8e-07	1.9e-07	4.1e-07	1.5e-08	3.1e-07	3.5e-07	4.8e-08	4.2e-08	1.9e-08
		$R_K$	7.9e-10	8.8e-10	9.1e-10	7.3e-10	8.0e-10	9.5e-10	6.9e-11	7.5e-10	9.6e-10	4.3e-10	5.9e-10	6.6e-10
	$64 \times 64$	$t_\alpha$	-4.00	-2.25	-2.25	-4.00	-1.00	-1.00	-4.00	-2.50	-2.75	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-3.75	-3.75	-3.75	-1.25	-1.25	-4.00	-2.50	-2.75	0.00	0.41	0.29
		IT	9	92	92	3	90	90	9	199	156	17	23	20
		CPU	0.20	1.31	0.56	0.14	1.50	0.55	0.21	3.62	1.16	0.14	0.16	0.14
		$E_K$	9.8e-08	7.1e-07	6.9e-07	1.1e-06	7.2e-07	6.5e-07	9.8e-08	5.3e-06	4.0e-06	7.1e-07	4.6e-07	6.1e-08
		$R_K$	1.7e-10	8.7e-10	8.7e-10	6.5e-10	9.6e-10	8.8e-10	1.7e-10	9.3e-10	8.7e-10	8.1e-10	7.7e-10	5.7e-10
	$128 \times 128$	$t_\alpha$	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-1.25	-1.25	-4.00	-	-3.50	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-4.00	-4.00	-3.75	-1.50	-1.75	-4.00	-	-3.50	0.00	0.39	0.41
		IT	17	231	235	4	163	164	17	†	430	19	25	26
		CPU	1.91	18.80	6.36	1.12	15.55	4.41	1.89	-	10.86	0.86	0.95	0.96
		$E_K$	2.3e-07	3.0e-05	3.2e-05	1.9e-06	5.6e-06	4.4e-07	2.3e-07	-	1.2e-05	2.2e-06	9.0e-06	6.8e-05
		$R_K$	3.1e-10	9.6e-10	9.7e-10	4.9e-10	9.6e-10	9.9e-10	3.1e-10	-	9.9e-10	6.1e-10	6.9e-10	8.1e-10
	$256 \times 256$	$t_\alpha$	-4.00	-	-	-4.00	-1.25	-1.25	-4.00	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-	-	-4.00	-2.00	-2.00	-4.00	-	-	0.00	0.37	0.45
		IT	44	†	†	4	243	242	44	†	†	24	41	42
		CPU	12.69	-	-	10.57	129.01	31.72	13.11	-	-	7.49	7.15	7.17
		$E_K$	1.6e-04	-	-	1.1e-05	8.0e-06	8.0e-06	1.6e-04	-	-	1.2e-05	5.6e-06	1.7e-05
		$R_K$	9.0e-10	-	-	7.7e-10	9.9e-10	1.0e-09	9.0e-10	-	-	5.5e-10	9.9e-10	7.9e-10
FGMRES	$32 \times 32$	$t_\alpha$	-4.00	-2.00	-2.00	-3.50	-0.75	-0.75	-3.25	-2.25	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-2.50	-2.50	-2.50	-2.25	-1.00	-0.75	-3.25	-2.25	-2.25	0.00	0.41	0.14
		IT	7	38	39	17	37	39	9	43	53	14	18	14
		CPU	0.27	0.50	0.51	1.03	0.59	0.48	0.50	1.86	0.77	0.31	0.51	0.34
		$E_K$	9.1e-06	3.6e-05	2.7e-05	2.4e-05	1.8e-05	1.0e-05	4.8e-06	2.6e-05	6.5e-05	2.2e-06	2.2e-06	4.5e-06
		$R_K$	9.7e-08	9.5e-08	9.7e-08	9.3e-08	8.5e-08	9.5e-08	4.1e-08	7.6e-08	9.1e-08	8.0e-08	8.6e-08	9.7e-08
	$64 \times 64$	$t_\alpha$	-4.00	-2.25	-2.00	-3.50	-1.00	-0.75	-3.50	-2.50	-2.75	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.00	-3.75	-3.75	-2.25	-1.25	-1.25	-3.50	-2.50	-2.75	0.00	0.41	0.29
		IT	11	60	64	32	61	61	13	156	113	17	20	18
		CPU	3.95	12.73	7.83	12.09	13.60	7.13	4.94	22.79	14.45	3.47	4.21	3.97
		$E_K$	3.8e-06	5.4e-05	7.8e-05	7.5e-05	8.6e-05	4.8e-05	2.7e-05	8.9e-04	6.1e-04	2.0e-05	3.8e-06	8.4e-06
		$R_K$	2.4e-08	9.7e-08	9.7e-08	8.2e-08	9.8e-08	9.9e-08	7.6e-08	9.2e-08	9.7e-08	2.9e-08	7.6e-08	9.1e-08
	$128 \times 128$	$t_\alpha$	-4.00	-2.50	-2.50	-3.75	-1.00	-1.00	-4.00	-	-3.75	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.50	-4.00	-4.00	-2.75	-1.50	-1.75	-4.00	-	-3.75	0.25	0.39	0.41
		IT	19	134	134	36	109	112	22	†	352	21	33	34
		CPU	22.46	97.70	54.23	42.84	92.32	74.07	26.45	-	381.79	18.28	33.25	33.73
		$E_K$	4.2e-04	3.1e-03	3.2e-03	2.4e-04	3.4e-04	1.1e-04	1.4e-03	-	3.7e-04	2.4e-04	7.7e-03	3.7e-03
		$R_K$	9.0e-08	9.9e-08	9.9e-08	9.8e-08	9.4e-08	9.6e-08	8.0e-08	-	9.9e-08	8.5e-08	9.7e-08	8.2e-08
	$256 \times 256$	$t_\alpha$	-4.00	-	-	-3.50	-	-1.25	-4.00	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.25	-	-	-2.75	-	-1.75	-4.00	-	-	0.25	0.37	0.45
		IT	60	-	-	37	-	194	63	-	-	38	39	39
		CPU	458.14	††	††	276.00	††	947.80	462.32	††	††	228.54	224.71	231.07
		$E_K$	4.5e-02	-	-	4.3e-03	-	6.8e-03	1.4e-01	-	-	4.8e-03	1.1e-02	1.4e-02
		$R_K$	8.5e-08	-	-	9.6e-08	-	9.3e-08	9.0e-08	-	-	7.7e-08	7.4e-08	6.6e-08

دستور \naviO، در این جدول، یک دستور با ۹ آرگومان ورودی، برای تولید ۹ ستون اول و دستور \naviS با سه آرگومان ورودی، برای تولید سه ستون آخر است که به صورت زیر تعریف شده اند.

```
\newcommand{\naviO}[۹]{\&\# \&\# \&\# \&\# \&\# \&\# \&\# \&\# \&\#}
\newcommand{\naviS}[۳]{\&\# ۱ \&\# ۲ \&\# ۳}
```

با تغییر تعریف این دو دستور هر کدام از ستون های غیر لازم را می توان حذف نمود یا ترتیب قرار گرفتن آنها را عوض کرد. مثلاً برای حذف ستون های سوم، چهارم، ششم، هفتم و نهم دستور \naviO را به صورت زیر بازنویسی می کنیم.

```
\newcommand{\naviO}[]{\&\# \&\# \&\# \&\#}
```

و برای جابجایی دو ستون آخر دستور \naviS را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم.

(الف ۱.)  $\backslash\text{newcommand}\{\backslash\text{naviS}\}\{\&\{\#\}&\{\#\}&\{\#\}\}$

جدول الف ۱۲: نتایج عددی روش‌های GMRES و FGMRES برای مثال ۱.

	Grid	Prec.	GSS	GHSS	EHSS	HSS	SEPSS	SEPSS**	SEPSS*
GMRES	$32 \times 32$	$t_\alpha$	-3.75	-2.00	-0.75	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-2.50	-0.75	-2.25	0.00	0.14	0.41
		IT	6	54	52	61	17	17	22
		CPU	0.03	0.11	0.12	0.14	0.02	0.04	0.04
		$E_K$	1.8e-07	3.2e-07	1.9e-07	3.1e-07	4.8e-08	1.9e-08	4.2e-08
		$R_K$	7.9e-10	8.8e-10	8.0e-10	7.5e-10	4.3e-10	6.6e-10	5.9e-10
	$64 \times 64$	$t_\alpha$	-4.00	-2.25	-1.00	-2.50	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-3.75	-1.25	-2.50	0.00	0.29	0.41
		IT	9	92	90	199	17	20	23
		CPU	0.20	1.31	1.50	3.62	0.14	0.14	0.16
		$E_K$	9.8e-08	7.1e-07	7.2e-07	5.3e-06	7.1e-07	6.1e-08	4.6e-07
		$R_K$	1.7e-10	8.7e-10	9.6e-10	9.3e-10	8.1e-10	5.7e-10	7.7e-10
	$128 \times 128$	$t_\alpha$	-4.00	-2.50	-1.25	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-4.00	-1.50	-	0.00	0.41	0.39
		IT	17	231	163	†	19	26	25
		CPU	1.91	18.80	15.55	-	0.86	0.96	0.95
		$E_K$	2.3e-07	3.0e-05	5.6e-06	-	2.2e-06	6.8e-05	9.0e-06
		$R_K$	3.1e-10	9.6e-10	9.6e-10	-	6.1e-10	8.1e-10	6.9e-10
	$256 \times 256$	$t_\alpha$	-4.00	-	-1.25	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-4.00	-	-2.00	-	0.00	0.45	0.37
		IT	44	†	243	†	24	42	41
		CPU	12.69	-	129.01	-	7.49	7.17	7.15
		$E_K$	1.6e-04	-	8.0e-06	-	1.2e-05	1.7e-05	5.6e-06
		$R_K$	9.0e-10	-	9.9e-10	-	5.5e-10	7.9e-10	9.9e-10
FGMRES	$32 \times 32$	$t_\alpha$	-4.00	-2.00	-0.75	-2.25	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-2.50	-2.50	-1.00	-2.25	0.00	0.14	0.41
		IT	7	38	37	43	14	14	18
		CPU	0.27	0.50	0.59	1.86	0.31	0.34	0.51
		$E_K$	9.1e-06	3.6e-05	1.8e-05	2.6e-05	2.2e-06	4.5e-06	2.2e-06
		$R_K$	9.7e-08	9.5e-08	8.5e-08	7.6e-08	8.0e-08	9.7e-08	8.6e-08
	$64 \times 64$	$t_\alpha$	-4.00	-2.25	-1.00	-2.50	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.00	-3.75	-1.25	-2.50	0.00	0.29	0.41
		IT	11	60	61	156	17	18	20
		CPU	3.95	12.73	13.60	22.79	3.47	3.97	4.21
		$E_K$	3.8e-06	5.4e-05	8.6e-05	8.9e-04	2.0e-05	8.4e-06	3.8e-06
		$R_K$	2.4e-08	9.7e-08	9.8e-08	9.2e-08	2.9e-08	9.1e-08	7.6e-08
	$128 \times 128$	$t_\alpha$	-4.00	-2.50	-1.00	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.50	-4.00	-1.50	-	0.25	0.41	0.39
		IT	19	134	109	†	21	34	33
		CPU	22.46	97.70	92.32	-	18.28	33.73	33.25
		$E_K$	4.2e-04	3.1e-03	3.4e-04	-	2.4e-04	3.7e-03	7.7e-03
		$R_K$	9.0e-08	9.9e-08	9.4e-08	-	8.5e-08	8.2e-08	9.7e-08
	$256 \times 256$	$t_\alpha$	-4.00	-	-	-	-4.00	-4.00	-4.00
		$t_\beta$	-3.25	-	-	-	0.25	0.45	0.37
		IT	60	-	-	-	38	39	39
		CPU	458.14	††	††	††	228.54	231.07	224.71
		$E_K$	4.5e-02	-	-	-	4.8e-03	1.4e-02	1.1e-02
		$R_K$	8.5e-08	-	-	-	7.7e-08	6.6e-08	7.4e-08

توجه کنید که در فایل تکس، هر دو جدول یکی هستند. و داده‌ها در این جدول نیز وجود دارند. اما در خروجی ظاهر نمی‌شوند. بعضی مواقع نیاز است که برخی از داده‌های در جدول دیده نشوند، اما داده‌ها هم وجود داشته باشند. ممکن است بعداً این داده‌ها از شما خواسته شود و شما مجبور به ارائه آنها شوید. در این صورت کافیست دستور \navierOTHER تغییر کند و در نتیجه نیاز به تغییر مجدد جدول نمی‌باشد.

# واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

## **D**

Dimension ..... بعد

## **G**

Generalized Minimal Residual ..... مانده مینیمال تعمیم یافته

## **I**

Inexact PSS ..... روش PSS ناقص

## **K**

Krylov Subspace ..... زیرفضای کرایلف

## **M**

Minimum-degree algorithm ..... الگوریتم مینیمم درجه

## **P**

Positive Semi Definite ..... نیمه معین مثبت

Preconditioned ..... پیش شرط سازی شده

## **R**

Random Variable ..... متغیر تصادفی

## **S**

Saddle Point Problem ..... مسئله نقطه زینی

# واژه‌یاب انگلیسی

## **D**

Dimension [14](#)

## **G**

Generalized Minimal Residual [8](#)

## **I**

Inexact PSS [14](#)

## **K**

Krylov Subspace [14](#)

## **M**

Minimum-degree algorithm [14](#)

## **P**

Positive Semi Definite [15](#)

Preconditioned [14–16](#)

## **R**

Random Variable [14](#)

## **S**

Saddle Point Problem [6, 7, 15](#)

# فهرست نمادهای اختصاری

بدون استفاده از gossary

## ح

$A \otimes B$  ..... حاصل ضرب کرونکر ماتریس‌های  $A$  و  $B$

## ف

$\mathbb{R}^n$  ..... فضای حقیقی  $n$  بعدی

$\mathbb{C}^n$  ..... فضای مختلط  $n$  بعدی

$\mathbb{R}^{m \times n}$  ..... فضای ماتریس‌های حقیقی  $m \times n$  بعدی

$\mathbb{C}^{m \times n}$  ..... فضای ماتریس‌های مختلط  $m \times n$  بعدی

## ل

$\mathbb{R}$  ..... لیپ‌شیتس سراسری

$\mathbb{R}$  ..... لیپ‌شیتس محلی

## م

$\mathbb{R} \geq 0$  ..... مجموعه اعداد حقیقی نامنفی

$\mathbb{R}$  ..... مجموعه اعداد حقیقی

$\mathbb{C}$  ..... مجموعه اعداد مختلط

$\mathbb{R} > 0$  ..... مجموعه اعداد حقیقی مثبت

$\mathcal{R}$  ..... مجموعه‌ی همه چندجمله‌ای‌ها با ضرایب حقیقی از متغیر  $x$

$\Sigma[x]$  ..... مجموعه‌ای از مجموع مربعات چندجمله‌ای‌ها برحسب متغیر  $x$

## ن

$\|A\|_2$  ..... نرم طیفی ماتریس  $A$

## واژه‌نامه انگلیسی به فارسی

### A

Asymptotically stable ..... پایدار مجانبی

### B

Boundary ..... مرز

### C

Conncted ..... همبند

Control law ..... کنترلگر

Convex hull ..... پوسته‌ی محدب

### E

Equilibrium point ..... نقطه‌ی تعادل

Estimate of the region of attraction ..... تخمین ناحیه‌ی جذابیت

### G

Gain ..... بهره

Globally asymptotically stable ..... پایدار مجانبی سراسری

Globally Lipschitz ..... لیپ‌شیتس سراسری

Global stabilization ..... پایدارسازی سراسری

### I

Invariant set ..... مجموعه‌ی پایا

### K

Kronecker product ..... حاصل ضرب کرونکر

### L

Locally Lipschitz ..... لیپ‌شیتس محلی

Lyapunov function ..... تابع لیاپانوف



## **N**

Nonlinear system ..... سیستم غیر خطی

## **O**

Origin ..... مبدأ

## **P**

Pseudo-inverse ..... شبه معکوس

## **R**

Radially unbounded ..... شعاعی بیکران

Rational Lyapunov function ..... تابع لیپانوف کسری

Regional stabilization ..... پایدارسازی ناحیه ای

Region of attraction ..... ناحیه ی جذابیت

# واژه‌نامه فارسی به انگلیسی

## الف

saturation..... اشباع

## ب

State-Feedback..... بازخورد حالت

Vector of polynomials..... بردار چندجمله‌ای‌ها

Gain..... بهره

## پ

stable..... پایدار

Asymptotically stable..... پایدار مجانبی

Convex hull..... پوسته‌ی محدب

## ت

Lyapunov function..... تابع لیاپانوف

Estimate of the region of attraction..... تخمین ناحیه‌ی جذابیت

## ح

Kronecker product..... حاصل ضرب کرونکر

## ز

Subdifferential..... زیر دیفرانسیل

## س

Nonlinear system..... سیستم غیرخطی

Polynomial systems..... سیستم‌های چندجمله‌ای

## ش

Pseudo-inverse..... شبه معکوس

Radially unbounded..... شعاعی بیکران

## ف

Topological space..... فضای توپولوژیکی

## ک

Control law ..... کنترلگر

## ل

Globally Lipschitz..... لیپشیتس سراسری

Locally Lipschitz ..... لیپشیتس محلی

## م

Point-wise maximum..... ماکزیمم نقطه ای

Origin ..... مبدأ

Sum-of-squares..... مجموع مربعات

## ن

Region of attraction..... ناحیهی جذابیت

## Abstract

# Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems

Mohsen Masoudi

In this thesis, we investigate the solution of a system of linear equations and propose an iterative method which is a generalization of positive definite and skew-Hermitian splitting method. Then we study the saddle point problems and propose some iterative methods and preconditioners for these systems. In continuation, we utilize the positive definite and skew-Hermitian splitting method for the saddle point problems and study its convergence and semi-convergence properties. We will see that this method is a generalization of many existing methods which have been presented for the solution of these problems. Finally, an special case of this method is investigated and the optimal parameters of the method are computed. Numerical results are presented to verify the theoretical results and comparison with other methods.

**Keywords:** *Saddle point problems, Periconditioner, Convergence, Semiconvergence*



## **Office of Vice President for Academic and Graduate Affair**

### **Declaration of the dissertation originality**

Hereby, I declare that this dissertation entitled *Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems* which has been defended for a M.Sc degree in the filed Applied Mathematics in January 2019, is a result of my own research. In the case when some other studies and/or publications have been used in the text are cited. This dissertation has not been submitted for any degree in any other institutions, inside or outside of Iran. I hereby undertake that, in the case of making any use from my dissertation for publishing articles, books, patent registration, etc., the permission of my major advisor and department is necessary; otherwise, University of Guilan authorities have the right to take action against me based on rules and requirements, and in the case of canceling my degree, I have no right to claim.

Full name:

Signature and Date:



University of Guilan

In The Name of God

Proceeding for M.Sc dissertation

Defence session for granting M.Sc dissertation on award to **Mr Mohsen Masoudi** majoring in **Applied Mathematics** with minor in **Numerical Analysis** title of dissertation

### Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems

in Guilan province with 6 hours credit, held on 2019/2/26 at 16:00 in Faculty of **Mathematical Sciences**, University of Guilan. The juries announced the following decision:

☐ The dissertation is accepted with score . . . of 20 ranged as Excellent ☐, Very good ☐, Good ☐, Acceptable ☐.

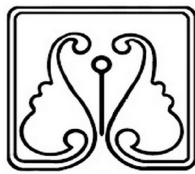
☐ The dissertation is acceptable with minor corrections with score . . . of 20 ranged as Excellent ☐, Very good ☐, Good ☐, Acceptable ☐.

☐ The dissertation with present status did not accepted and suggested that . . . . .

Juries' members	Ranks	Specialization	Affiliation	Signature
Major Advisor <b>1-Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh</b>	Professor	Numerical Analysis	University of Guilan	
Minor Advisor <b>1-First Advisor</b>	Assistance Professor	Numerical Analysis	University of Guilan	
Examiners <b>1-Dr. Faeza Toutounian</b>	Professor	Numerical Analysis	Frdowsi University of Mashhad	
<b>2-Dr Saeed Ketabchi</b>	Associate Professor	Operation research	University of Guilan	
<b>3-Dr. Hosein Amininkhah</b>	Professor	Numerical Analysis	University of Guilan	

Representative of College Graduate Office <sup>2</sup>	Rank	Affiliation	Signature
<b>Dr. Nasir Taghizadeh</b>	Professor	Differential Equations	

<sup>1</sup> After completing of all documents four copies of the proceeding have to be submitted and handed to the Director of College Graduate Office. From four copies, one will be kept in the student department, one in Graduate Office, one in the file of student and the last hands to the student.



University of Guilan

Department of Applied Mathematics

Specialization: Numerical Analysis

# **Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems**

Student

**Mohsen Masoudi**

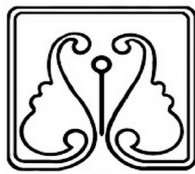
Supervisor

**Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh**

Advisor

**First Advisor**

January 2019



University of Guilan

Faculty of Mathematical Sciences

A thesis submitted in partial fulfillment of the  
requirements for the degree of Master of Science

# **Some Results on the Preconditioning of the Saddle Point Problems**

Student

**Mohsen Masoudi**

Supervisor

**Dr. Davod Khojasteh Salkuyeh**

Advisor

**First Advisor**

January 2019